$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{-m}]$, le signe de $g(x)$ est celui de

$g(-\sqrt{-m}) = -\sqrt{-m} < 0$

$\forall x \in [\sqrt{-m}, +\infty[$, le signe de $g(x)$ est celui de $g(\sqrt{-m}) = \sqrt{-m} > 0$

d'où $D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$.

Conclusion : • Si $m > 0 \Rightarrow D_m = \mathbf{R}$.

• Si $m = 0 \Rightarrow D_m = \mathbf{R}_+^*$.

• Si $m < 0 \Rightarrow D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$.

2°/ *1er Cas* : $m > 0$. f_m est définie, continue et dérivable sur D_m .

$$\forall x \in D_m \ , \ f_m'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+m}}}{x + \sqrt{x^2+m}} = \frac{\sqrt{x^2+m} + x}{\sqrt{x^2+m}\ (x + \sqrt{x^2+m})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+m}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+m}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{m}{\sqrt{x^2+m} - x}\right)$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$ $\left(X = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+m} - x}\ ;\ \text{si } x \to -\infty, X \to 0^+\right)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+m}) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

2ème Cas : $m = 0$. $f_0'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
$f_0(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$